Academia Sabatina de Jóvenes Talento - Nicaragua 2021

Cuadriláteros cíclicos

Jafet Baca

1. Introducción

Los cuadriláteros cíclicos constituyen una de las herramientas básicas que todo olímpico debe manejar. Todo problema de geometría euclidiana en olimpiadas involucra, prácticamente, al menos un cuadrilátero cíclico. Comencemos estableciendo en qué consisten.

Definición 1 (Cuadriláteros cíclicos)**.**

Sea $ABCD$ un cuadrilátero. Si los puntos A, B, C y D están sobre una misma circunferencia, diremos que $ABCD$ es un *cuadrilátero cíclico*.

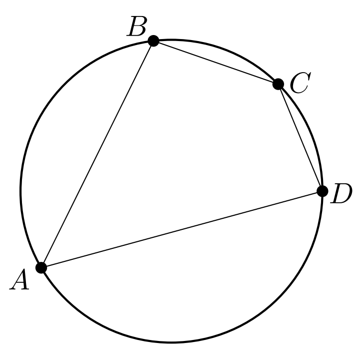

Figura 1. El cuadrilátero $ABCD$ es cíclico.

Alternativamente, podemos decir que $ABCD$ está *inscrito*.
Es claro que a todo triángulo podemos trazarle su circunferencia circunscrita (es decir, su circuncírculo); sin embargo, esto no necesariamente ocurre en el caso de los cuadriláteros. Por consiguiente, sería esclarecedor averiguar cuáles son las condiciones que deben satisfacerse para concluir que un cuadrilátero posee un circuncírculo. Nos encargaremos de esto en la próxima sección.

2. Propiedades fundamentales

Proposición 1.

El cuadrilátero $ABCD$ es cíclico si y solo si $\angle ABD = \angle ACD$.

Prueba. Inicialmente, supongamos que $ABCD$ está inscrito en un círculo, luego:

$$\angle ABD = \frac{\widehat{AD}}{2} = \angle ACD$$

es decir, $\angle ABD$ y $\angle ACD$ deben ser iguales ya que *subtienden* al mismo arco $\widehat{AD}$ en el círcuncírculo de $ABCD$.
Pasemos a la otra dirección de la demostración y asumamos que $\angle ABD = \angle ACD$. Debemos probar que A, B, C y D yacen sobre una misma circunferencia. Dibujemos el circuncírculo de $\triangle ABD$ y supongamos que interseca por segunda vez a la recta DC en $E \neq C$. Como $ABCD$ es cíclico, tenemos que:

$$\angle ABD = \angle AED$$

de este modo, concluimos que $\angle AED = \angle ACD$, lo cual implica que $AE \parallel AC$. Es claro que esto es una contradicción, pues AE y AC comparten un punto común A. Por consiguiente, $E = C$ y $ABCD$ es cíclico. $\square$

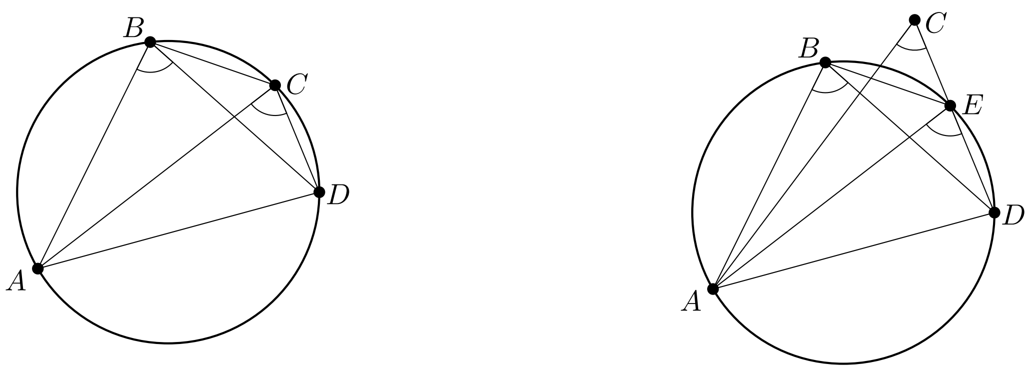

Figura 2. Ángulos subtendidos en un mismo arco proporcionan cuadriláteros cíclicos.

En realidad, tenemos tres pares más de ángulos iguales de este tipo en un cuadrilátero cíclico, a saber:

$$\begin{aligned} \angle DBC &= \angle DAC \\ \angle BCA &= \angle BDA \\ \angle CDB &= \angle CAB \end{aligned}$$

En la figura posterior, los ángulos iguales están rellenos con un mismo color.

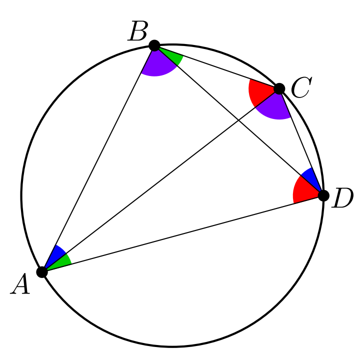

Figura 3. Pares de ángulos iguales en un cuadrilátero cíclico

Proposición 2.

Un cuadrilátero $ABCD$ es cíclico si y solo algún par de ángulos opuestos suman $180°$.

Prueba. Primero, asumamos que el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico. Luego

$$\angle ABC + \angle CDA = \frac{\widehat{CDA}}{2} + \frac{\widehat{ABC}}{2} = \frac{360°}{2} = 180°$$

Similarmente, es posible demostrar que también ocurre que $\angle BCD + \angle DAB = 180°$.
Ahora, supongamos que $\angle AB + \angle CDA = 180°$. Tracemos la circunferencia circunscrita al triángulo ABC y asumamos que no pasa por el vértice D. Sea $E = \overline{DC} \cap (ABC)$. Como el cuadrilátero $ABCE$ es cíclico tenemos que

$$\angle ABC + \angle CEA = 180°$$

por tanto $\angle CEA = \angle EDA$ y entonces DA es paralela EA, lo cual es una contradicción ya que dos rectas paralelas no se intersecan. Entonces D coincide con E y por lo tanto el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico. □

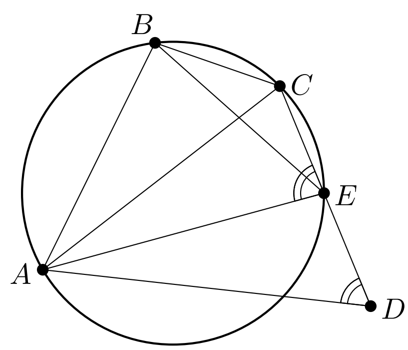

Figura 4. Ángulos opuestos suplementarios brindan cuadriláteros cíclicos.

Proposición 3.

Sea P el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero $ABCD$. Entonces $ABCD$ es cíclico si y solo si

$$AP \cdot PC = BP \cdot PD$$

Prueba. Comencemos con el caso de que $ABCD$ es cíclico. Como

$$\angle BAP = \angle CDP \qquad \text{y} \qquad \angle ABP = \angle DCP$$

entonces $\triangle APB \sim \triangle DPC$, así que $\frac{AP}{DP} = \frac{BP}{CP}$ y el resultado es inmediato.
En caso contrario, si $AP \cdot PC = BP \cdot PD$ se sigue que $\frac{AP}{DP} = \frac{BP}{CP}$ y ya que $\angle APD = \angle BPE$ entonces $\triangle APB \sim \triangle DPC$, por lo que $\angle BAP = \angle CDP$ y $ABCD$ debe tener un circuncírculo. □

Proposición 4.

Sea Q punto de intersección de las rectas AD y CB de un cuadrilátero $ABCD$. Luego, $ABCD$ es cíclico si y solo si $QA \cdot QD = QB \cdot QC$.

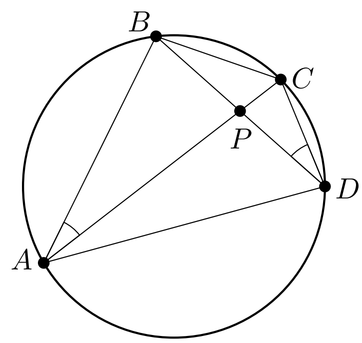

Figura 5. Potencia del punto de intersección de las diagonales.

Prueba. Notemos que

$$QA \cdot QD = QB \cdot QC \iff \frac{QA}{QC} = \frac{QB}{QD} \tag{1}$$

Observemos que $\angle AQC = \angle BDQ$. Así que (1) se cumple si y solo si $\triangle AQC \sim \triangle BQD$; a su vez, esto ocurre si y solo si $\angle QAC = \angle DBQ$, es decir, si y solo si $ABCD$ es cíclico, como deseábamos probar. $\square$

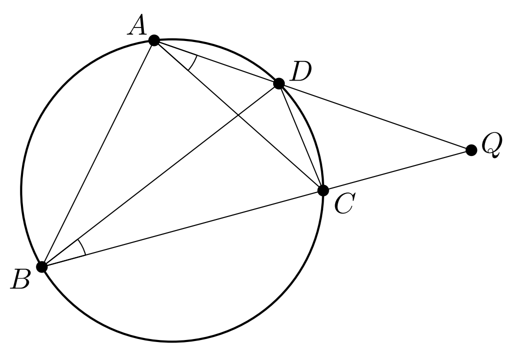

Figura 6. Potencia del punto de intersección de dos lados opuestos.

3. Problemas resueltos

Ejemplo 1.

(OMCC 2014, P2) Sea $ABCD$ un trapecio con bases AB y CD, inscrito en un círculo con centro O. Sea P la intersección de las rectas BC y AD. Un círculo por O y P interseca los segmentos BC y AD en puntos internos F y G, respectivamente. Probar que $BF = DG$.

Solución. Como $PGOF$ es cíclico, obtenemos que $\angle DGO = \angle OFB$. Asimismo, notemos que

$$\angle DPB = \angle DPC = 180^\circ - 2\angle BCD = 180^\circ - \angle BOD$$

por tanto $PBOD$ es cíclico, lo cual implica que $\angle OBF = \angle ODG$. Por criterio ángulo-ángulo concluimos que $\triangle GOD \sim \triangle FOB$, pero sabemos que los lados correspondientes OD y OB tienen igual medida, de modo que estos triángulos deben ser congruentes y, por ende, $DG = BF$. $\square$

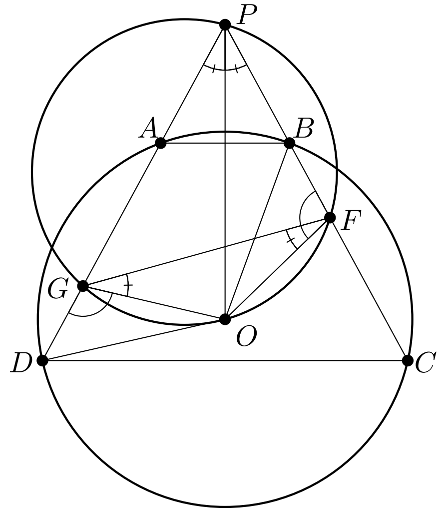

Figura 7. Segundo problema de la OMCC 2014.

Ejemplo 2.

(OIM 2014, P5) Sea ABC un triángulo acutángulo y H su ortocentro. Sea D el pie de altura desde A a BC. Sean M y N los puntos medios de BH y CH, respectivamente. Las rectas DM y DN intersecan a AB y AC en puntos X y Y, respectivamente. Si P es el punto de intersección de XY con BH y Q el punto de intersección de XY con CH, mostrar que H, P, D y Q están sobre una misma circunferencia.

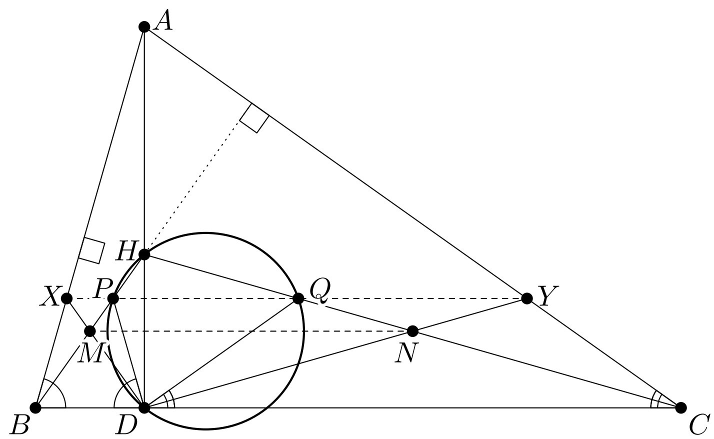

Figura 8. Un cuadrilátero cíclico que involucra al ortocentro.

Solución. Como MN es base media de BC tenemos que $MN \parallel BC$. Por el teorema de Menelao a $\triangle HDN$ y puntos A, Y, C, así como a $\triangle HDM$ y puntos B, X y A obtenemos que

$$\frac{DY}{YN} = \frac{CH}{CN} \cdot \frac{AD}{AH} = \frac{BH}{BM} \cdot \frac{AD}{AH} = \frac{DX}{XM}$$

así que $XY \parallel MN$. De este modo,

$$\angle QYD = \angle YDC = \angle NDC = \angle NCD = \angle QCD$$

así que $QYCD$ es cíclico. Además, puesto que $QY \parallel DC$, $QYCD$ debe ser un trapecio isósceles (¿por qué?), por lo que $\angle QDC = \angle YCD = \angle ACB$. Análogamente, se demuestra que $XBDP$ es un trapecio isósceles y que $\angle PDB = \angle XBD = \angle ABC$; por consiguiente, deducimos que

$$\angle PDQ = 180^\circ - \angle PDB - \angle QDC = 180^\circ - \angle ABC - \angle ACB = \angle BAC$$

pero $\angle PHQ = 180^\circ - \angle BAC$ (¿por qué?), por tanto $\angle PHQ + \angle PDQ = 180^\circ$, lo cual implica que $HPDQ$ debe ser cíclico. □

Ejemplo 3.

(IMO 2018, P1) Sea Γ la circunferencia circunscrita triángulo acutángulo ABC. Los puntos D y E están en los segmentos AB y AC, respectivamente, y son tales que $AD = AE$. Las mediatrices de BD y CE cortan a los arcos menores AB y AC de Γ en los puntos F y G, respectivamente. Demostrar que las rectas DE y FG son paralelas (o son la misma recta).

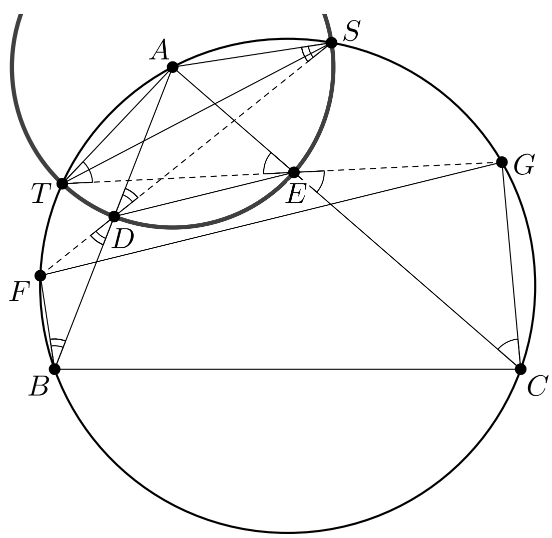

Figura 9. Primer problema de la IMO 2018.

Solución. Si las rectas DE y FG coinciden no hay nada que probar, así que supongamos que son distintas. Como F y G están sobre las mediatrices de $\overline{BD}$ y $\overline{CE}$, respectivamente, los triángulos BFD y CGE son isósceles en F y G, de este modo

$$\angle FBA = \angle FBD = \angle FDB \qquad \text{y} \qquad \angle ACG = \angle ECG = \angle CEG$$

Sea $S = \overline{FD} \cap \Gamma,\ F \neq S$. Notemos que

$$\angle ASD = \angle ASF = \angle FBA = \angle FDB = \angle SDA$$

Es decir, $\triangle SAD$ es isósceles con $AS = AD$. Similarmente, si definimos a T como el segundo punto de intersección de GE con Γ podemos conseguir que $AT = AE$. Hemos obtenido que

$$AS = AD = AE = AT$$

lo cual implica que $T,\ D,\ E,\ S$ están sobre la circunferencia de centro A y radio AD, i.e. $TDES$ es un cuadrilátero cíclico, por tanto

$$\angle TED = \angle TSD = \angle TSF = \angle TGF$$

por consiguiente, $DE \parallel FG$. □

4. Problemas propuestos

Problema 1. Las circunferencias C_1 y C_2 se intersecan en los puntos A y B. Por el punto A se traza una recta que corta a las circunferencias $C_1,\ C_2$ en los puntos $C,\ D$, respectivamente. Por los puntos $C,\ D$ se trazan tangentes a las circunferencias, las cuales se intersectan en el punto M. Demostrar que el cuadrilátero $MCBD$ es cíclico.

Problema 2. Sea BC el diámetro de un semicírculo y sea A el punto medio del semicírculo. Sea M un punto sobre el segmento AC. Sean P y Q los pies de las perpendiculares desde A y C a la línea BM, respectivamente. Demuestra que $BP = PQ + QC$.

Problema 3. Sea ABC un triángulo y sea D el pie de la altura desde A. Sean E y F sobre una línea que pasa por D de tal manera que AE es perpendicular a BE, AF es perpendicular a CF, E y F son diferentes de D. Sean M y N los puntos medios de BC y EF, respectivamente. Demuestra que AN es perpendicular a NM.

Problema 4 (Teorema de Miquel). En un triángulo ABC sean M, N y P puntos arbitrarios sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente. Se trazan las circunferencias circunscritas a los triángulos APN, BMP y CNM. Demuestra que las tres circunferencias tienen un punto en común.

Problema 5 (Teorema de Brahmagupta). Demuestra que si un cuadrilátero cíclico tiene sus diagonales perpendiculares, entonces la perpendicular trazada hacia un lado desde el punto de intersección de las diagonales biseca el lado opuesto.

Problema 6. (OMCC 2015, P3) Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico con $AB < CD$, y sea P el punto de intersección de las rectas AD y BC. El circuncírculo del triángulo PCD corta a la recta AB en los puntos Q y R. Sean S y T los puntos donde las tangentes desde P al circuncírculo de $ABCD$ tocan a dicha circunferencia.

- Pruebe que $PQ = PR$.
- Muestre que $QRST$ es un cuadrilátero cíclico.

Problema 7. (IMO 2019, P2) En el triángulo ABC, el punto A_1 está en el lado BC y el punto B_1 está en el lado AC. Sean P y Q puntos en los segmentos AA_1 y BB_1, respectivamente, tales que PQ es paralelo a AB. Sea P_1 un punto de la recta PB_1 distinto de B_1, con B_1 entre P y P_1, y $\angle PP_1C = \angle BAC$. Análogamente, sea Q_1 un punto en la recta QA_1, distinto de A_1, con A_1 entre Q y Q_1, y $\angle CQ_1Q = \angle CBA$. Demostrar que los puntos $P,\ Q,\ P_1$ y Q_1 son concíclicos.